

Problème 138 – Le jeu de Lucky Luke – Corrigé

1) 10 doigts représentent un univers fini à 10 éléments.

Choisir n doigts consiste à trouver toutes les parties à n éléments parmi 10 possibles.

Il y a donc $\binom{10}{n}$ combinaisons possibles.

2) Avec n allant de 0 à 10, le nombre total de combinaisons est égal à $\sum_{n=0}^{10} \binom{10}{n}$.

La leçon nous permet de dire que cette somme est égale à 2^{10} , soit 1 024.

Autre explication possible : en créant un arbre de combinaisons, qui indique pour chaque doigt son état (levé, ou pas levé), on a 2 branches possibles pour chaque doigt, ce qui donne bien 2^{10} possibilités.

3) Si n doigts ne sont pas levés, cela veut dire qu'il y en a $10 - n$ de levés.

$$\text{Or } \binom{10}{n} = \binom{10}{10-n}.$$

Donc le nombre de combinaisons pour n doigts levés est le même que pour n doigts non levés.

4) a) Pour $n < 2$ ou $n > 7$, Lucie n'a aucune possibilité.

Pour $n \geq 2$ et $n \leq 7$: si elle lève 2 doigts de la main gauche, elle va en lever $n - 2$ sur la main droite.

La main gauche est un ensemble fini à 5 éléments dans lequel elle doit choisir 2 éléments : il y en a donc $\binom{5}{2}$. De même sur la main droite, elle aura donc $\binom{5}{n-2}$ possibilités.

Donc Lucie aura $\binom{5}{2} \binom{5}{n-2}$ possibilités.

$$\text{b) Pour } n = 6 : \binom{5}{2} \binom{5}{4} = 50.$$

5) $\binom{10}{n}$ est le nombre de combinaisons de n doigts levés sur 10 possibles.

Or ces n doigts se répartissent sur 2 mains à 5 doigts : si on appelle k le nombre de doigts levés sur la main gauche, il y en aura $n - k$ sur la main droite. On doit alors séparer les cas où $n \leq 5$ et $n > 5$:

$$\text{Pour } n \leq 5 : \binom{10}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{5}{k} \binom{5}{n-k}$$

C'est la somme du nombre de combinaisons en choisissant k doigts levés sur la main gauche et $n - k$ levés sur la main droite, avec k allant de 0 au nombre n choisi.

Pour $n > 5$:

C'est la même chose, sauf qu'on ne peut pas choisir moins de $k = n - 5$ doigts sur la main gauche car sinon on ne pourrait pas compléter avec les doigts de la main droite pour lever n doigts. De même on ne peut pas choisir plus de 5 doigts sur la main gauche, donc on est limité à $k = 5$.

$$\binom{10}{n} = \sum_{k=n-5}^5 \binom{5}{k} \binom{5}{n-k}$$

Ces deux formules se résument en une seule en introduisant les notations min et max proposées

En effet : k débute de 0 tant que $n \leq 5$ (dans ce cas $n - 5$ est négatif, donc $\max(0 ; n - 5) = 0$) -, et de $n - 5$ quand $n \geq 5$ (quand $n - 5$ est positif, donc $\max(0, n - 5) = n - 5$). $\max(0 ; n - 5)$ résume donc bien

quand k débute dans la somme, en fonction de n .

De même : k se termine à n quand $n \leq 5$ (et dans ce cas, $\min(5 ; n) = n$). k se termine à 5 quand $n \geq 5$ (et dans ce cas, $\min(5 ; n) = 5$). $\min(5 ; n)$ résume donc bien quand k se termine dans la somme, en fonction de n .